ハミルトン系の多重エルゴード性

早大理工　相沢洋二

1　はじめに

ハミルトン系の大域的な研究は、これまで二つの大きな手法；すなわち、(1) 解析的位相的手法と (2) エルゴード論的手法の下で発展してきた。主に数学の分野で進歩したものであった。一方、物理においても、その成果を利用しつつ具体的な解析を進めるとともに、上の二つの手法によっては、ただちには解明できない新しい事実を、計算機シミュレーションによって多く発見してきた。一言で言へば、それは”相空間の超限的微細構造”に関することがらであった。多くの物理現象に、その微細構造が直接反映することから、その理論的研究が進められて来た。その中心になっている理論は、微細構造に自己相似性を要請するスケーリング理論である。[1) これは上の二つの手法の中間に位置する第3の手法と考えられる。微細構造の自己相似性は、新たな統計則を持ち込むことであるから、第1の手法から導かれなくはならないことは同然であるし、さらに、エルゴード論的（測度の）構造を解明する第2の手法にも影響を与えることになる。

”超限的な微細構造がどのような性質をもつのか、”まだ、はっきりしないところが多い。また、それをどのように研究したらよいのか、方法さえもしっかりしているとは言いがたい。しかし、ハミルトン系の非可積分性の理解には、この問題を避けることができないことも事実である。ここでは、多重エルゴード性という素朴な着想からこの問題にアプローチする。まだ確信のもてる段階ではないが、計算機シミュレーションやモデルの結果さらにいくつかの予想も含めて、多重エルゴード性のイメージを浮き彫りにしたい。

2 多重エルゴード性

ハミルトン系の相空間の構造は、とても複雑である。そこにある軌道を、従来のエルゴード論的な手法で特徴づけようとすると、さまざまな困難につきあたる。たとへば、"カオス" の軌道を計算機でシミュレートしてみると、力学変数の長時間平均が収束しなかったり、かりに収束しても、その値が初期条件ごとに違っていたりすることがしばしばある。このような性質を理解するためには、支配的なエルゴード的測度が唯ひとつではなく、多くの測度が相空間を棲みわけていると考えるほかはない。エルゴード的測度が無数に共存していること自体は例へばK系と呼ばれる強いエルゴード性を持つ力学系においても共通の性質であり、一般的なことである。その場合、唯一の支配的な測度を除くと、他は、ほとんど無視できる測度、すなわち、特異測度、点測度に対応するものたちである。しかし、ハミルトン系においては、支配的な測度が無数に存在するということが大きな違いである。つまり、平衡分布 (Gibbs 測度) が唯一ではない。このような性質を<u>多重エルゴード性</u>(Multi-Ergodicity) と呼ぶ。相空間の構造と関連させて、多重エルゴード性を理解することは基本的な問題である。

3 淀み運動

多重エルゴード性の起源はつぎのように考えられる。一つのトーラス付近の運動は、ほぼ概周期的であるが、時間が経つにつれて、軌道は、しだいにそのトーラスを離れて、他のトーラスの付近に遷移してゆく。トーラスからトーラスへの遷移軌道のことを Arnold は Whisker (トーラスの髭) と呼んだ。Whisker は $t \to \pm\infty$ でトーラスに限りなく漸近する軌道の全体である。したがって、Whisker の束を記述する測度は、トーラス面に鋭く局在することが予想される。トーラス面付近にこのように局在測度の全体が、多重エルゴード的測度の成分である。

一つの局在測度の下での運動を、<u>淀み運動</u>(Stagnant motion) と呼ぶ。淀み運動は、不安定性の弱い運動である。エルゴード理論的に、それをどのクラスにいれるべきものなのか、まだわからない。

4 トーラスからカオスへの相変化

淀み運動は、トーラスと隣接している。そこには、秩序ー無秩序相変化と類似の臨界現象が観測される。振幅および位相のゆらぎに $f^{-\nu}$ スペクトルがあり、回転数

（トーラスの秩序パラメタ）の特異性に、ある普遍的法則があるものと考えられている。今のところ、先の局在測度の特異性と、それらの普遍法則を結びつけるスケーリング理論しかできていない。

5　大域的な拡散運動

Arnold の Whisker にそって、軌道は相空間をゆっくり彷徨する。その拡散的運動は、ブラウン運動と同じ f^{-2} スペクトルを持つことが予想されている。その軌道は、過去の記憶を強く残しながら、しかし Whisker ごとに全く異なった振る舞いを示す。つまり、初期条件敏感性と同時に、強い記憶効果という二つの（一見すると）相反する性質をもっている。大域的な拡散の特徴は、パワー・スペクトル密度の収束の速さ（ Large Deviation 特性）でとらえることができる。また、相空間でのトーラスの分布が自己相似的であると考えて、拡散の普遍的な性質を理論的に導き出すことができる。しかし、今のところトーラスの分布を明確に決定するような理論はない。

6　相空間の自己相似構造

ハミルトン系のトーラス（ＫＡＭトーラス、ＰＢトーラス）は自己相似的に分布していると考えられている。Fat Fractal 指数は、その分布の大域的構造を決める特性量の一つである。

一方、Last KAM の崩壊過程や、Cantorus に注目した局所的な構造にも自己相似性があると主張されている。ここにもスケーリング的理論はあるが、力学系の厳密な理論からの説明はまだない。

7　平衡から非平衡の問題へ

ハミルトン系の多重エルゴード性の結果として、ハミルトン・カオスは本質的に非平衡の問題として扱わなければならないことになる。アーノルド拡散も、”不可逆性”の問題と関連づけて研究されなくてはならない。さらに、多重エルゴード性は、相空間がコンパクト（ bound state ）でない場合、すなわち、scattering state の理解にとっても多重エルゴード的側面が考慮されなくてはならない。散乱軌道が、さきに述べた局在測度に乗っている場合がとくに重要である。このとき、散乱断面積

は（無限）多価となり、散乱カオスが発生する。ここでは、"軌道不安定性が弱ければ弱いほど、散乱軌道はカオスになる"という、パラドックス的な現象がみられる。これも、ハミルトン系の多重エルゴード性から説明されるものである。散乱カオスは Boltzmann 方程式の衝突項に大きな寄与をする。しかし、緩和時間等にどのように影響するのかはまだはっきりしない。

古典ハミルトン系の論文集として、R.S.Mackay and J.D.Meiss, Hamiltonian Dynamical Systems (Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, 1987) がある。また、多重エルゴード性についてのこまかい考察は Y.Aizawa et al, Prog.Theor.Phys. 81(1989),249; Prog.Theor.Phys.Suppl.No98 (1989),36 を参照して下さい。